Het HSA-vierkant

Arno van den Essen

March 13, 2007

Onlangs hebben drie middelbare scholieren, Jesse Hoekstra, Willem Schilte en Petra Alkema een zeer bijzonder magisch vierkant gemaakt, het HSA-vierkant genaamd, dat in de wereld der magische vierkanten net zo'n sensatie is als het RSA-cryptosysteem dat was in de zeventiger jaren van de vorige eeuw.

De Masterclass

In de maanden oktober tot en met december 2006 namen zo'n dertig middelbare scholieren deel aan de Masterclass Magische Vierkanten die ik aan de Radboud Universiteit in Nijmegen gaf. Op zes donderdagmiddagen werden de leerlingen een drietal onderwerpen aangeboden, op grond waarvan ze een profielwerkstuk konden gaan maken: vormsudokus, alfa-magische vierkanten en Franklin magische vierkanten. Het laatste onderwerp sloot aan bij mijn recente oplossing van het Franklin-mysterie, dat in mijn boek [1] beschreven wordt.

Zo'n 250 jaar geleden construeerde Benjamin Franklin zo'n vijftal bijzonder magische vierkanten, waarvan onderstaand 8×8 vierkant het bekendste is. Dit vierkant verscheen op 17 januari 2006 zelfs op een postzegel van US postage ter gelegenheid van Franklins 300 ste geboortedag.

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

Het bijzondere aan dit vierkant is dat niet alleen de som van alle getallen in iedere rij en iedere kolom gelijk is aan 260, maar ook de som van alle getallen in iedere *halve* rij en iedere *halve* kolom (vanaf de rand gerekend) is gelijk aan 130. Bovendien is ook de som van alle getallen in ieder 2×2 deelvierkant gelijk aan 130. In tegenstelling tot een "gewoon" magisch vierkant is de som der getallen op de diagonaal niet gelijk aan de magische som. In plaats daarvan is de som van alle getallen op ieder van de vier *gebogen* diagonalen zoals bijvoorbeeld $52, 3, 5, 54, 43, 28, 30, 45$ of $45, 30, 28, 43, 23, 40, 34, 17$ gelijk aan 260. Maar nog is niet alle magie beschreven. Ook alle parallelle gebogen diagonalen zoals bijvoorbeeld $61, 62, 12, 43, 23, 56, 2, 1$ of $20, 51, 5, 6, 58, 57, 15, 48$ hebben 260 als som. Een bijzonder vierkant!

De uitdaging

Tijdens de Masterclass werd uiteengezet hoe zulke vierkanten gemaakt kunnen worden. Vervolgens werden een aantal mogelijke onderzoeksopdrachten geformuleerd zoals, maak je eigen 8×8 Franklin magisch vierkant (dat wil zeggen een vierkant dat alle bovengenoemde eigenschappen van het Franklin-vierkant bezit), maar ook maak een 8×8 Franklin magisch vierkant dat ook nog *panmagisch* is, met andere woorden zo dat ook nog de diagonalen en alle daaraan parallelle *gebroken* diagonalen als som 260 hebben, of, nog uitdagender, maak zo'n vierkant van orde 16. Echter de ultieme uitdaging was: maak een 12×12 Franklin magisch vierkant, omdat zo'n vierkant tot op de dag van vandaag nog niet gevonden is!

Tijdens de Masterclass hadden Petra, Jesse en Willem al een 8×8 panmagisch Franklin magisch vierkant gemaakt, denkende dat het een huiswerkopgave was! Ze besloten daarom hun energie te besteden aan het zoeken van een 12×12 Franklin magisch vierkant.

14 december 2006 was de op één na laatste bijeenkomst van de Masterclass. Op het eind van de middag kwamen Petra, Jesse en Willem naar mij toe en vertelden me dat ze erin geslaagd waren onderstaand 12×12 bijna-Franklin magisch vierkant te maken.

1	142	11	136	8	138	5	139	12	135	2	141
120	27	110	33	113	31	116	30	109	34	119	28
121	22	131	16	128	18	125	19	132	15	122	21
48	99	38	105	41	103	44	102	37	106	47	100
73	70	83	64	80	66	77	67	84	63	74	69
60	87	50	93	53	91	56	90	49	94	59	88
85	58	95	52	92	54	89	55	96	51	86	57
72	75	62	81	65	79	68	78	61	82	71	76
97	46	107	40	104	42	101	43	108	39	98	45
24	123	14	129	17	127	20	126	13	130	23	124
25	118	35	112	32	114	29	115	36	111	26	117
144	3	134	9	137	7	140	6	133	10	143	4

Hoe bijzonder dit vierkant is zal ik hieronder laten zien: in mijn ogen is het *het meest magische vierkant dat ooit* in zo'n 5000 jaar magische vierkanten geschiedenis gemaakt is!

Het HSA-vierkant

Om te beginnen is bovenstaand vierkant inderdaad bijna het gezochte 12×12 Franklin magische vierkant: de som van alle getallen in iedere rij en iedere kolom is 870, de som van alle getallen op iedere gebogen diagonaal en iedere parallelle gebogen diagonaal is 870 en de som van alle getallen in ieder 2×2 deelvierkant is gelijk aan 290. Tenslotte is ook de som van alle getallen in iedere halve kolom gelijk aan 435. De enigste eigenschap die nog ontbreekt om Franklin magisch te zijn is de *halve rij-eigenschap*: de som van alle getallen in iedere halve rij is echter gelijk aan 434 of 436, in plaats van 435.

Het ontbreken van deze eigenschap wordt echter meer dan gecompenseerd door een scala aan andere magische eigenschappen.

Zo is het vierkant 1/3-de Franklin magisch. Dat wil zeggen dat de som van alle getallen in iedere "een derde rij" en iedere "een derde kolom" (vanaf de rand gerekend) gelijk aan 290, het derde deel van de magische som. Bijvoorbeeld $11 + 110 + 131 + 38 = 290$ maar ook $108 + 39 + 98 + 45 = 290$ en ook $80 + 53 + 92 + 65 = 290$. Verder is het vierkant panmagisch, wat zoals eerder opgemerkt betekent dat alle diagonalen en alle parallelle gebroken diagonalen, zoals bijvoorbeeld $121, 27, 11, 9, 32, 127, 101, 78, 96, 94, 74, 100$ als som 870 hebben. Deze eigenschap ontbrak bij het eerder genoemde 8×8 vierkant van Franklin.

Maar het HSA-vierkant heeft nog heel wat meer verrassingen in petto. Zo bevat het ook een groot aantal cirkels: iedere uit twaalf getallen bestaande cirkel met middelpunt op de horizontale lijn L die het vierkant in tweeën verdeelt heeft als som 870, zoals bijvoorbeeld de cirkel gevormd door de getallen $60, 70, 38, 105, 80, 91, 54, 65, 40, 107, 75, 85$ of die gevormd door de getallen $91, 77, 102, 37, 63, 59, 86, 82, 108, 43, 68, 54$. Verder heeft *iedere* cirkel bestaande uit acht getallen, zoals bijvoorbeeld $16, 113, 31, 125, 44, 66, 80, 105$ of $123, 107, 40, 17, 32, 9, 134, 118$ als som 580. Maar nog is niet alle magie beschreven. Naast cirkels zitten er ook nog een groot aantal andere figuren en letters met som 870 in het vierkant. De reden daarvan is dat de som van *ieder* tweetal getallen dat symmetrisch ligt ten opzichte van de lijn L gelijk is aan 145. Zo kun je bijvoorbeeld met de getallen $37, 106, 74, 59, 86, 71, 39, 108, 61, 96, 49, 84$ de letter D en met $14, 46, 72, 85, 60, 73, 99, 131, 87, 50, 58, 95$ de letter E vormen, die iedere som 870 hebben. Meer algemeen heeft ieder figuur, bestaande uit twaalf getallen dat symmetrisch is ten opzichte van de lijn L als som 870. Samengevat, het **HSA**-vierkant is inderdaad een **H**eel **S**peciale **A**ttractie!

[1] Arno van den Essen, *Magische Vierkanten, Van Lo-Shu tot sudoku*, Veen Magazines, Diemen, 2006.